



بررسی تفکر در ریاضیات  
با استفاده از مباحثی در علوم شناختی

تألیف

منوچهر ذاکر

دوازدهم تیرماه ۱۳۵۰



بررسی تفکر در ریاضیات

با استفاده از مباحثی در علوم شناختی

تألیف: منوچهر ذاکر

ویراستار و نسخه‌پرداز: مریم نوربخش  
صفحه‌آرا: فاطمه نظری  
طراح جلد: علیرضا دربانی  
ناظر چاپ: حمیدرضا دمیرچی  
مرکز نشر دانشگاهی  
چاپ اول ۱۴۰۳  
تیراژ ۱۰۰  
چاپ و صحافی: مرکز نشر دانشگاهی  
۱۸۵۰۰۰ تومان



9 789640 117576

نشانی فروشگاه: خیابان انقلاب، روه‌روی سینما سپیده، پاساژ خیبری، تلفن: ۶۶۴۱۰۶۸۶، ۶۶۴۱۰۶۸۷  
فروش اینترنتی: [www.iup.ac.ir](http://www.iup.ac.ir)

حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است. فهرست‌نویسی پیش از درج در پایگاه ملی جمهوری اسلامی ایران

سرشناسه: ذاکر، منوچهر، ۱۳۵۰.  
هنوان و نام پدیدآور: بررسی تفکر در ریاضیات با استفاده از مباحثی در علوم شناختی / تألیف منوچهر ذاکر.  
مشخصات نشر: تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۴۰۳.  
مشخصات ظاهری: ۱۳۰ ص.  
فروست: مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۷۵۷. علوم پایه (ریاضی، آمار و کامپیوتر)؛ ۱۹۹.  
شابک: 978-964-01-1757-6  
وضعیت فهرست‌نویسی: فیا  
موضوع: ریاضیات - فلسفه  
موضوع: Mathematics - Philosophy  
موضوع: تفکر انتقادی  
موضوع: Critical thinking  
شناسه افزوده: مرکز نشر دانشگاهی  
شناسه افزوده: Iran University Press  
رده‌بندی کنگره: QA۹  
رده‌بندی دیویی: ۵۱۰/۱  
شماره کتابشناسی ملی: ۱۰۰۱۲۱۲۹  
اطلاعات رگرده کتابشناسی: فیا

## فهرست

پنج	پیشگفتار	
۱		۱. مروری بر نظریات پیشین تقسیم‌بندی ریاضی دانان و معرفی مفاهیم یونگی ذهن
۱		۱-۱ مقدمه‌ای بر طبقه‌بندی و نوع‌شناسی شخصیت
۶		۲-۱ نوع‌شناسی‌ها و تقسیم‌بندی‌های مرتبط در حوزه ریاضیات
۱۳		۳-۱ معرفی سنخ شهودی در نظریه یونگ
۱۸		۴-۱ برون‌گرایی و وابستگی به پاداش
۲۱		کتابنامه
۲۲		۲. نوع‌شناسی پرنده/قورباغه در ریاضیات
۲۲		۱-۲ مقدمه
۲۵		۲-۲ پرسش‌نامه مربوط به تقسیم‌بندی پرنده/قورباغه
۲۶		۳-۲ پرسش‌نامه مربوط به تقسیم‌بندی N/S
۲۹		۴-۲ نتایج تجربی و ویژگی‌های ریاضی دانان نوع N (پرنده) و S (قورباغه)
۳۱		کتابنامه
۳۲		۳. تحلیل عددشناسی، علم عدد و حروف
۳۲		۱-۳ مقدمه‌ای بر عددشناسی و علم حروف

۳۶	۲-۳ عددشناسی
۳۸	۳-۳ علم حروف
۴۱	۴-۳ نکات نهایی
۴۴	کتابنامه
۴۵	۴. پردازش‌های فکری اصلی در ریاضیات
۴۵	۱-۴ مقدمه
۴۸	۲-۴ ادراک عدد و پردازش تقریبی با اعداد
۵۲	۳-۴ پردازش نمادین/صوری
۶۱	۴-۴ پردازش بصری/فضایی
۶۸	۵-۴ پردازش ترکیبی
۷۱	۶-۴ تحلیل پردازش‌ها از دیدگاه بحث علوم شناختی
۸۰	۷-۴ پیکربندی داده‌ها و تابع‌های تبدیل
۸۵	۸-۴ نکات تکمیلی دو مبحث پردازش‌ها و همسیم‌بندی
۸۷	کتابنامه
۸۸	۵. شهود و زبان و بررسی مناقشه شهودگرایی و صورت‌گرایی
۸۸	۱-۵ خلاصه فصل و مقدماتی درباب شهود
۹۳	۲-۵ چند بحث تاریخی درباب شهود
۹۷	۳-۵ مروری بر پردازش‌های شهودی و دامنه عمل آنها
۱۰۱	۴-۵ هیولاها و وضعیت حال حاضر شهود
۱۰۶	۵-۵ بررسی شهودگرایی و تقابل آن با صورت‌گرایی
۱۰۹	۶-۵ اهمیت هم‌زمان شهود و زبان: نقد فلسفه شهودگرایی
۱۱۸	کتابنامه

تقدیم به شهسوار اندیشه‌ورزی شهودی، شاهین  
بلندپرواز و تیزچنگال عرصه علوم و ریاضیات

ژول آنری پوانکاره (۱۸۵۴-۱۹۱۲)

پیشگفتار

در عصر حاضر، تخصصی و شاخه‌مانند شدن روزافزون علوم بر همگان روشن است. هر متخصص علمی فقط در حوزه‌ای محدود و در آن رشته تحصیلات عالی کسب می‌کند و به پژوهش می‌پردازد. اکنون اگر از دانشجو و محقق ریاضی تعریف ریاضیات و توصیفی نسبتاً جامع از آن را بپرسید به احتمال زیاد شما را امید خواهد کرد. این موضوع در همه رشته‌های علمی با نظام گسترده فکری صدق می‌کند. وضعیت یادشده با تمثیلی موجز قابل بیان است: فرض کنید در کارخانه‌ای بزرگ مشغول به کار هستید و تخصصتان تولید قطعه‌ای فنی یا اجرای امورات جزئی کارخانه است ولی در محصول نهایی کار بی‌خبرید. مشغول تولید چه چیزی هستید؟ ریاضیات و دیگر رشته‌های علمی در حکم همان محصول‌اند.

کتاب حاضر پاسخی به دغدغه مطرح شده است. بدین دلیل که ابزارهای نظری خاصی در این نوشته به کار رفته است ادعای جامع و مانع بودن تحلیل خود را از ریاضیات نداریم. کاربست مباحث علوم شناختی، از نظریه حافظه و ادراک شناختی اعداد گرفته تا عصب‌شناسی شناختی، با هدف تحلیل تفکر ریاضی در ذهن انسان، از حوزه‌های پژوهشی داغ و روبه‌رشد در چند دهه اخیر است که منجر به کشفیاتی بسیار چشمگیر در باب ماهیت پردازش ریاضیاتی شده است. این دستاوردهای شناختی به زبان فنی در مقالات تخصصی بیان می‌شوند و ریاضی‌کاران، اعم از دانشجویان و پژوهشگران رشته ریاضی، چندان امکان فهم

آنها را ندارند. متخصصان علوم شناختی هم از بینش ریاضی بی بهره‌اند. کتاب حاضر پلی میان دو دانش ریاضی و علوم شناختی برقرار و امکان درک برخی از چشمگیرترین نتایج شناختی را دریاب ریاضیات برای ریاضی‌کاران فراهم می‌کند. مباحث علوم شناختی درج شده در عنوان کتاب حاضر به معنای بهره‌برداری از همه دستاوردهای شناختی در ریاضیات نیست بلکه، به منظور تحلیل پرسش‌های بنیادین خاص کتاب، به مبحث بسیار مهم حافظه در علوم شناختی، به‌ویژه حافظه کاری و تکلیف‌های شناختی مرتبط با مسائل ریاضی و نیز مفاهیم شناختی نوینی، مانند حس عدد و سیستم عددی تقریبی، پرداخته و آن را به‌زبان نیمه‌تخصصی شرح داده‌ایم. به علاوه، در تحلیل و تقسیم‌بندی ریاضی‌دانان (که اولین بار در این کتاب عرضه می‌شود) قویاً از نظریه‌های روان‌شناسی شخصیت، مانند سنخ‌شناسی شخصیتی یونگ، استفاده کرده‌ایم.

«ریاضی‌دان» و «ریاضیات» دو موضوع اصلی کتاب هستند. تقسیم‌بندی و نوع‌شناسی ریاضی‌دانان مورد توجه بسیار از ریاضی‌دانان و حاشیه‌نویسان ریاضی قرار گرفته است و برخی از ریاضی‌دانان سرشناس نظریه‌هایی مطرح کرده‌اند. نگارنده پی برده است که تقسیم‌بندی شخصیت علمی یا ریاضیاتی افراد موضوعی پُر مخاطره و پروژه‌های دشوار است و نمی‌توان بدون بهره‌گیری از تفکر، نظریه‌پردازی قوی و جامع و نیز نتایج تجربی در این راه گام برداشت. در کتاب حاضر، برای بازتعریف کاربردهای پیشین تقسیم‌بندی ریاضی‌دانان و همچنین ارائه مدلی نوین، از سنخ‌شناسی شخصیتی به‌کار و برخی از نظریه‌های شناختی خلق و خوی استفاده کرده‌ایم. با این حال، توجه ما در کتاب بیشتر معطوف به جداسازی پردازش‌های ریاضی و تحلیل هریک از آنهاست.

رویکرد ما به مقوله تفکر ریاضیاتی حاکی است که این تفکر را می‌توان به تعداد کمی از پردازش‌های بنیادین ریاضی تجزیه کرد. تعبیر بنیادین بودن پردازش‌ها نشان‌دهنده این واقعیت است که تعریف و تفکیک آنها از طریق بازتعریف مجددشان برحسب مباحث علوم شناختی و نظریه حافظه به دست می‌آید. بدین منظور نشان داده خواهد شد که دامنه‌هایی متمایز در حافظه انسان عهده‌دار اجرای پردازش‌های بنیادین هستند. اگرچه این پردازش‌ها در کل تفکر ریاضی با هم آمیخته می‌شوند روش‌های خاص خودشان را در ریاضیات همراهی می‌کنند و هرکدام قلمرو خاص را در معرفت ریاضی دارند.

در پرتو شناخت ریاضیات به‌وسیله بحث پردازش‌ها، نگاهی هم به انباشته حدوداً سه‌هزارساله دانش و مواد ریاضی می‌افکنیم. پرسش‌های بنیادین دریاب ریاضیات از

هستی‌شناسی اشیا و ضرورت احکام ریاضی تا نحوه وابسته بودن/نبودن معرفت ریاضی به مشخصات و محدودیت‌های ذهن بشر را در بر دارد. زبان، تجربه یا مکاشفات و آفرینش ذهنی کدام‌یک بیشترین اهمیت را برای معرفت ریاضی دارند؟ آیا ریاضیات از جنس زبان است و پرسش‌ها درخصوص معنا و نحوه ارجاع نام‌ها و مفاهیم ریاضی، ضرورت و صدق احکام ریاضی همانند مشابه آنها در زبان‌شناسی پاسخ داده می‌شوند؟ پرسش‌های مذکور پیشینه‌ای بسیار کهن دارند.

در سطور آغازین بخش حاضر، توجه مخاطبان به پرسش‌های بنیادین درباره ریاضیات جلب شد چراکه تفکر درباب این‌گونه پرسش‌ها، پایه‌پای ارتقای دانش ریاضی فرد، حتی اگر به پاسخ‌های کامل یا ضمنی منتهی نشوند، در یافتن بینش جامع به دانش ریاضی و ادراک نقشه‌ای از مواضع و نظریه‌های ریاضی و ارتباطات این نواحی (یعنی شناخت محصول نهایی کارخانه) نقش کلیدی دارند. راننده بینش مدرس ریاضی در توصیفات مذکور و توانایی ساختن آن نقشه غنی‌تر باشد تفاوت تدریس بالاتر و انتقال تجارب موفق‌تر خواهد بود تا هنگام مواجهه با سؤالی در کلاس درس. تدریس به گونه‌ای باشد که این نحوه آموزش موجب می‌شود متعلم لذت بیشتری از شیوه تدریس ببرد چراکه احساس خواهد کرد روی مطالب درسی تسلطی خاص پیدا کرده که قبلاً نداشته است.

حال که موضوع بحث به توانایی ساختن نقشه دیگر هدایت شد، کتاب حاضر در صدد تدوین نقشه‌ای با چنین اوصافی است. بنابراین، می‌بایست نسبت توضیح دهیم که این نقشه چه مواضع و مسیرهایی دارد تا خواننده قبل از مطالعه کتاب چشم‌اندازی از مطالب و محتویات کتاب داشته باشد و مسیرهای موضوعی آن را ردیابی کند. کتاب حاضر در اصل به ریاضی‌دانان، تفاوت ماهوی نحوه تفکر آنان و خود ریاضیات و روش‌های گوناگون فعالیت‌های فکری ریاضی اختصاص دارد. موضوع دیگر کتاب معرفی مفاهیم و نظریاتی در حوزه روان‌شناسی و علوم شناختی است که در تبیین و تحلیل دقیق موضوعات اصلی به آنها نیاز داریم. از آنجاکه نوع‌شناسی و تقسیم‌بندی از مباحث محوری کتاب است، فصل اول را با مقدمه‌ای بر نظریه عمومی نوع‌شناسی و دامنه آن آغاز می‌کنیم. فصل اول آثار و عقاید قبلی را درزمینه تقسیم‌بندی و نوع‌شناسی ریاضی‌دانان مرور می‌کند. ملاحظه خواهیم کرد که علاوه بر حاشیه‌نویسان ریاضی، اعم از مورخان و شرح‌حال‌نویسان، خود ریاضی‌دانان به موضوع تقسیم‌بندی و نوع‌شناسی ریاضی‌دانان علاقه نشان داده و نظریه‌هایی مطرح کرده‌اند.

فصل دوم به مبحث تقسیم‌بندی ریاضی‌دانان اختصاص دارد و نوع‌شناسی پرنده/قورباغه را شرح می‌دهد. همچنین حاوی پرسش‌نامه‌ای است که هر شخص، حتی نوجوان، با تکمیل آن تشخیص خواهد داد که اگر به حوزه ریاضی وارد شود جزو کدام‌یک از دسته‌های پرنده و قورباغه (در ریاضیات) خواهد بود. از سوی دیگر، موضوعاتی، مانند عددشناسی، جفر، علم عدد و حروف، گستردگی و کاربرد فراوانی در باورهای دینی عموم مردم و حتی بین صاحبان سخن دارند. این مطالب بی‌ارتباط با موضوعی که آن را «ریاضیات جوهری» می‌نامیم نیستند. با استفاده از دانشی که نحوه تفکر جوهری و اسطوره‌ای و تقابل آن را با تفکر مابعداسطوره‌ای شرح می‌دهد موضوعات مذکور را، از عددشناسی تا علم حروف، بررسی می‌کنیم. حاصل کار فصل سوم کتاب است.

ریاضیات و ماهیت آن موضوع دیگر کتاب است. رهیافت ما در کتاب پیش رو از طریق معرفی پردازش‌های فکری است. عاملی می‌شود که حین ریاضی‌ورزی در ذهن یا روی کاغذ جریان دارند.

در فصل چهارم، ابتدا مفهوم حد را به پردازش تقریبی با اعداد را که از چشمگیرترین دستاوردهای علوم شناختی در باب ریاضیات است مطرح و سپس پردازش‌های نمادین/صوری، بصری/فضایی و ترکیبی را معرفی و بررسی می‌کنیم. همچنین به دستاوردهای درازمدت ریاضی می‌پردازیم که عمدتاً محصول نسبت هرکدام از پردازش‌ها هستند. پردازش‌ها، به‌ویژه دو پردازش اصلی نمادین/صوری و بصری/فضایی، در پس‌زمینه مباحث نظریه حافظه در روان‌شناسی شناختی تفکیک می‌شوند که این موضوع را با تعدادی آزمون فکری و بهره‌برداری از تکنیک‌های نظریه حافظه شرح می‌دهیم. این آشنایی بیشتر با پردازش بصری/فضایی و ارتقای توانایی ذهن خوانندگان، تمرین‌هایی را در فصل چهارم آورده‌ایم. فصل‌های چهارم و پنجم در واقع شرح و بسط مقاله‌ای هستند که نگارنده به‌زبان انگلیسی منتشر کرده است.<sup>۱</sup> یکی از مناقشات حوزه فلسفه ریاضی و بین ریاضی‌دانان در مورد ماهیت ریاضیات در دو نحله فکری شهودگرایی و صورت‌گرایی است. لویترین براور<sup>۲</sup> و داوید

۱. مشخصات مقاله از این‌قرار است:

Zaker, M., 2019, "A memory theoretic approach for investigating the roles of language and intuition in mathematical thinking activities", arxiv.org/abs/1910.00003

2. Luitzen Brouwer (1881-1966)

هیلبرت<sup>۱</sup>، به ترتیب، از چهره‌های شاخص دو نحله فکری مذکور هستند. اینکه ریاضیات محصول زبان یا مکاشفات ذهنی است چالش اصلی مناقشه شهودگرایی و صورت‌گرایی به‌شمار می‌رود. به‌علاوه، شهودی‌اندیشان در بحث شهود ریاضی با منطقیون و صورت‌گرایان نزاع دارند با این تذکر که شهودی‌اندیشی در ریاضیات با فلسفه شهودگرایی متفاوت است. آنری پوانکاره<sup>۲</sup> شهودی‌اندیشی شاخص و توانمند به‌شمار می‌آید. این‌گونه مباحثات میان ریاضی‌دانان از اواسط قرن نوزدهم میلادی آغاز شد و در چند دهه اول قرن بیستم به اوج خود رسید. از جمله ریاضی‌دانان شهودی‌اندیش یا مدافعان تفکر شهودی فلیکس کلاین<sup>۳</sup>، برنهارد ریمان<sup>۴</sup>، ژول آنری پوانکاره، امیل بورل<sup>۵</sup>، هرمان وایل<sup>۶</sup> و تا حدی لوئیترن براؤر (شهودگرا) هستند. در جبهه دیگر، مخالفان روش‌های شهودی، مدافعان تفکر نظام‌مند و منطقی یا معتقدان به صورت‌گرایی از قبیل کارل وایرشراس<sup>۷</sup>، ریشارد ددکیند<sup>۸</sup>، هانس هان<sup>۹</sup>، برتراند راسل<sup>۱۰</sup> و داوید هیلبرت، نام دارند. اگرچه در دهه‌های اخیر این مناقشه داغ و بحرانی نیست و جنبه تاریخی یافته است، هر گاه برخی از فیلسوفان و مورخان ریاضی و حتی ریاضی‌دانان صاحب‌نظر به مسئله شهودگرایی می‌پردازند.

فصل پنجم کتاب به تحلیل مبحث شهودگرایی در ریاضیات، جنبه‌های تاریخی آن و نقد شهودگرایی اختصاص دارد. از آنجاکه شهودگرایی سبب توسعه وسیع در فلسفه و حتی ریاضیات است و تفاسیر متفاوتی از آن شده است در فصل پنجم کتاب، با طرد برخی از تعبیر ناموجه از شهود، محدوده‌ای برای مفاهیم شهود در ریاضیات مشخص کرده و بحث را در این چارچوب پیش برده‌ایم. خواننده به ارزش ویژه‌ای که کتاب به فلسفه‌های شهود داده است پی خواهد برد ولی بحث ما با انتقاد از براؤر آغاز می‌شود که پرچم فلسفه شهودگرایی به‌شمار می‌رود. با استفاده از بحث پردازش‌ها، استدلال خواهیم کرد که هرگونه فروکاستن شهود

- 
1. David Hilbert (1862-1943)
  2. Jules Henri Poincaré (1854-1912)
  3. Felix Klein (1849-1925)
  4. Bernhard Riemann (1826-1866)
  5. Émile Borel (1871-1956)
  6. Hermann Weyl (1885-1955)
  7. Karl Weierstrass (1815-1897)
  8. Richard Dedekind (1831-1916)
  9. Hans Hahn (1879-1934)
  10. Bertrand Russell (1872-1970)

فضایی و هندسی به شهود زمانی (از جمله فروکاستن براؤر) بی اعتبار است. همان طور که شرح خواهیم داد، انتقاد ما از فلسفه شهودگرایی براؤری این است که به قابلیت های شهود بصری/فضایی در ریاضیات، مانند شهود هندسی، توجه نکرده و به جایش به شهود زمان و تعبیر گسسته از روند زمان جاری اهمیت داده است. این موضع فکری باعث شده است براؤر به پیوستار مختصات دکارتی پناه آورد.

در کتاب حاضر، دو جنبه از ریاضیات، الف) ریاضیات به مثابه دانش بلندمدت سازمان یافته و مدون و ب) ریاضیات به عنوان فعالیت فکری سیال و فعال در ذهن، را از هم جدا کرده ایم. شکل گیری معلوم و دانش مدون ریاضی عمدتاً از خلال فعالیت های نوع ب حاصل می شود. بر مبنای این تمایز، رویکردی متفاوت به مواجهه با پرسش اولویت زبان یا شهود برای ریاضیات داریم که متکی بر کارکردهای خاص پردازش های نمادین/صوری و بصری/فضایی و نیز آزمون های شناختی خاص با پردازش هاست. نقش خاص زبان و شهود (تخیل بصری/فضایی) را در جنبه ب) ریاضیات بررسی می کنیم. نتیجه کار نشان می دهد ریاضیات معرفتی تک بافتی نیست که، برای مثال تماماً از ساختار زبانی شکل گرفته باشد. بنابراین، هم پردازش های مرتبط با زبان و هم شهود بصری/فضایی نقش های بی بدیل در ریاضیات دارند. در نهایت، توضیح خواهیم داد که این نقش ها به چه نحو و در کدام بخش از ریاضیات مؤثر و منحصربه فرد هستند.

در پایان، از آقای سیامک کاظمی، بابت پیشنهاد مرکز نشر دانشگاهی، از زحمات مدیر کارگروه ریاضی، آمار و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، آقای کر و حیدری اصل، ویراستار محترم، سرکار خانم یاشیل نوربخش، و همچنین حمایت مرکز نشر دانشگاهی در انتشار کتاب حاضر تشکر و قدردانی می کنم.

منوچهر ذاکر

۱۴۰۳